SÜREKLİ DAĞILIMLAR

Ki-Kare Dağılımı

X~ Gamma (α, β) dağılımına sahip bir rastgele değişken iken k>0 ve tamsayı olmak üzere $\alpha = r/2$ ve $\beta = 2$ ise X rastgele değişkenine Ki-kare dağılımına sahiptir denir. Ki-kare dağılımına sahip bir X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{r/2}} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-x/2} & , x > 0 \\ 0 & , dd \end{cases}$$

şeklindedir. Gamma dağılımının özel bir durumu olan Ki-kare dağılımının "r" ile gösterilen ve pozitif tamsayı değer alan tek parametresi vardır. Dağılımın bu parametresine serbestlik derecesi denir. 'r' serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahip X rastgele değişkeni X~$\chi^2_{(r)}$ şeklinde gösterilir. X rastgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$E(X)=\frac{r}{2}.2 = r$

$V(X)=\frac{r}{2}.2^2 = 2r$

Beta Dağılımı

Beta dağılımından önce Beta fonksiyonunu tanımlayalım:

Beta fonksiyonu:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

Beta fonksiyonunun Gamma fonksiyonu türünden değeri $\alpha > 0, \beta > 0$ için

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

şeklindedir. Buradan

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

olur.

Tanım: X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , \quad 0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0 & , \quad dd \end{cases}$$

şeklinde ise X rastgele değişkeni Beta dağılımına sahiptir denir ve X~Beta (α, β) şeklinde gösterilir.

Beta dağılımının beklenen değeri ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Örnek: Bir tatil yöresinde aynı kapasiteye sahip yüzme havuzlarının hava sıcaklığı nedeniyle bir günde belli bir oranın buharlaştığı biliniyor. Birçok gün sonra bu oran

$\alpha = 5 \; ve \; \beta = 2$ olan Beta dağılımı ile modellenecek şekilde gözlemlendiğine göre;

a) X rastgele değişkeninin beklenen değerini bulunuz. (E(X)=?)
b) X rastgele değişkeninin varyansını bulunuz. (V(X)=?)
c) Verilmiş çok sıcak bir günde havuzun en az %20 sinin buharlaşmış olması olasılığı nedir?

Çözüm: X~Beta($\alpha = 5, \beta = 2$) rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(5)\Gamma(2)} x^{5-1}(1-x)^{2-1} & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad dd \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6!}{4!1!} x^4(1-x) & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad dd \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 30x^4(1-x) & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad dd \end{cases}$$

olur.

a) $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{5}{5+2} = \frac{5}{7}$

b) $V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{5}{196}$

c) $P(X \geq 0{,}2) = \int_{0,2}^{1} f(x)dx = \int_{0,2}^{1} 30x^4(1-x)dx = 30\int_{0,2}^{1}(x^4 - x^5)dx = 0{,}033$

Kaynaklar

1. Akdi, Y. (2010). Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.
2. Sağlam, V., Sağır, M. ve Yücesoy, E. (2018). Olasılığa Giriş, Güncellenmiş 3. Baskı, Seçkin Yayınevi.
3. Akdeniz, F. (2007). Olasılık ve İstatistik, Nobel Kitabevi.
4. Hogg, R. V. and Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.
5. Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.
6. Ross, M,R. (2012) Olasılık ve İstatistiğe Giriş-Mühendisler ve Fenciler için, 4. Basımdan Çeviri, Nobel Kitabevi.
7. Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.
8. Erbaş, S.O. (2007). Olasılık ve İstatistik, İkinci Baskı, Gazi Kitabevi.